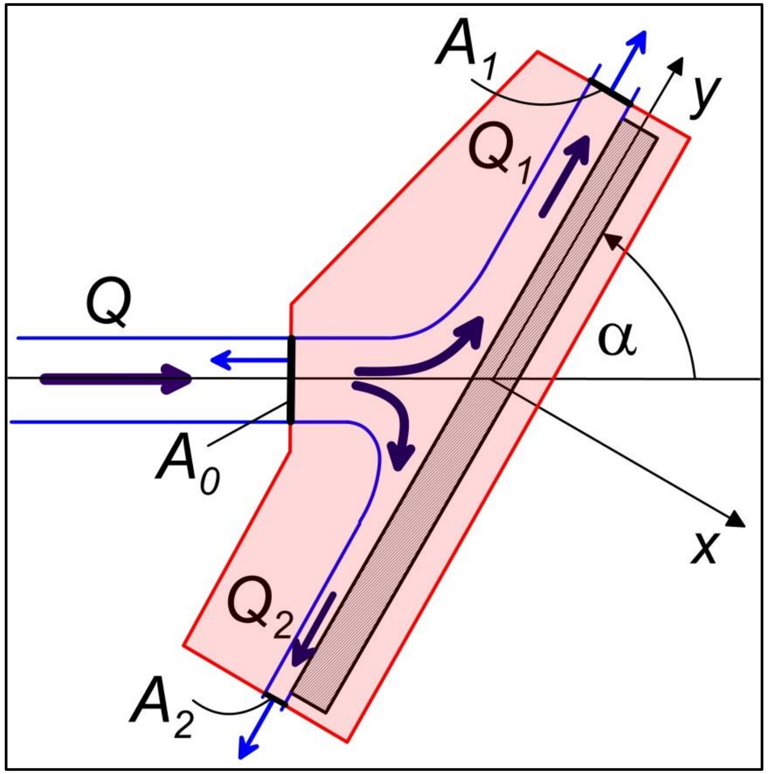
OBLICZANIE REAKCJI DYNAMICZNYCH – DALSZE PRZYKŁADY

1. REAKCJA STRUMIENIA NA UKOŚNĄ ŚCIANĘ



Brzeg obszaru: $\partial\Omega = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup reszta$

Na brzegu $p \equiv p_a$

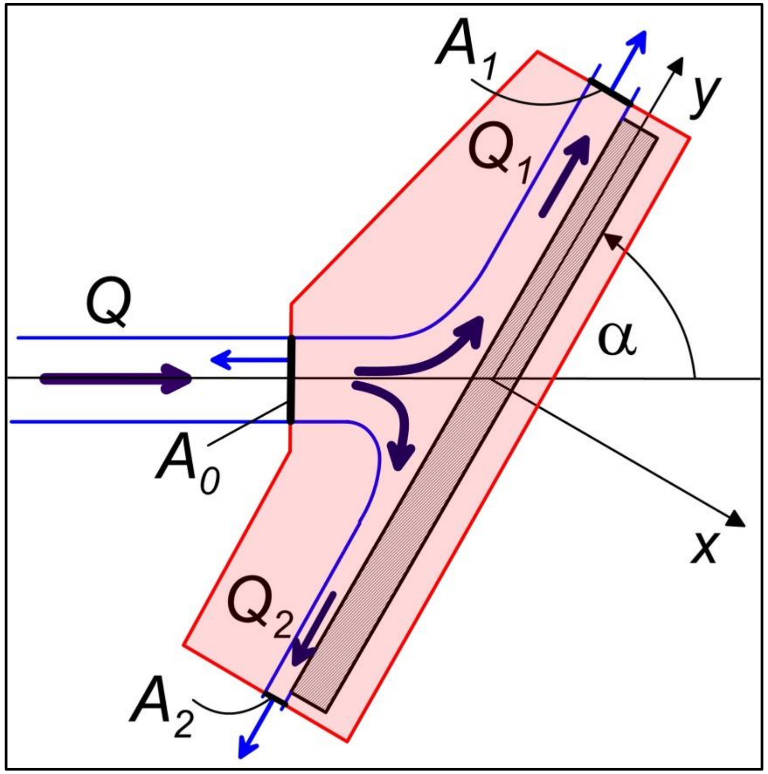
Reakcja zadana jest wzorem:

$$\boldsymbol{R} = -\int_{A_0} \rho \upsilon_n \boldsymbol{\upsilon}\, dS - \int_{A_1} \rho \upsilon_n \boldsymbol{\upsilon}\, dS - \int_{A_2} \rho \upsilon_n \boldsymbol{\upsilon}\, dS$$

Dalej … $\upsilon_0 = Q / A_0$ i $\upsilon_0 = \upsilon_1 = \upsilon_2$.

Na A_0**:** $\boldsymbol{\upsilon} = \upsilon_0 \sin\alpha\, \boldsymbol{e}_x + \upsilon_0 \cos\alpha\, \boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{n} = -\sin\alpha\, \boldsymbol{e}_x - \cos\alpha\, \boldsymbol{e}_y$, $\upsilon_n \equiv \boldsymbol{\upsilon}\cdot\boldsymbol{n} = -\upsilon_0$

$$\int_{A_0} \rho \upsilon_n \boldsymbol{\upsilon}\, dS = -\rho A_0 \upsilon_0^2 \sin\alpha\, \boldsymbol{e}_x - \rho A_0 \upsilon_0^2 \cos\alpha\, \boldsymbol{e}_y$$



Na A_1**:** $\boldsymbol{\upsilon} = \upsilon_1 \boldsymbol{e}_y \equiv \upsilon_0 \boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_y$, $\upsilon_n = \upsilon_1 \equiv \upsilon_0$

$$\int_{A_1} \rho \upsilon_n \boldsymbol{\upsilon} \, dS = \rho A_1 \upsilon_0^2 \boldsymbol{e}_y$$

Na A_2**:** $\boldsymbol{\upsilon} = -\upsilon_2 \boldsymbol{e}_y \equiv -\upsilon_0 \boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{e}_y$, $\upsilon_n = \upsilon_2 \equiv \upsilon_0$

$$\int_{A_2} \rho \upsilon_n \boldsymbol{\upsilon} \, dS = -\rho A_2 \upsilon_0^2 \boldsymbol{e}_y$$

Po podstawieniu otrzymujemy

$$\boldsymbol{R} = \rho A_0 \upsilon_0^2 \sin\alpha \, \boldsymbol{e}_x + \rho \upsilon_0^2 (A_0 \cos\alpha - A_1 + A_2) \boldsymbol{e}_y =$$
$$= \rho Q \upsilon_0 \sin\alpha \, \boldsymbol{e}_x + \rho \upsilon_0 (Q \cos\alpha - Q_1 + Q_2) \boldsymbol{e}_y$$

Jak podzielił się wydatek?!

Przyjmiemy założenie (spełnione ściśle dla płynu nielepkiego): $R_y \equiv 0$ **(styczna do płyty).**

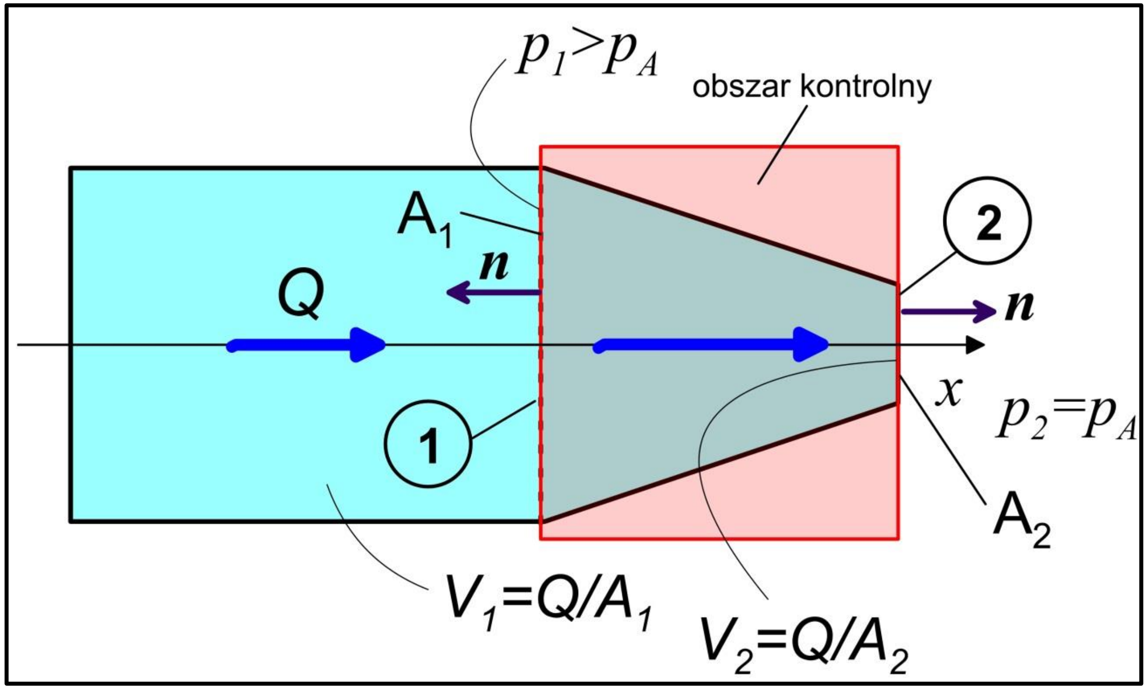
Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} Q_1 + Q_2 = Q \\ Q_1 - Q_2 = Q\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = \frac{1+\cos\alpha}{2} Q \\ Q_2 = \frac{1-\cos\alpha}{2} Q \end{cases}$$

Ostatecznie, reakcja ma tylko składową normalną do płyty równą

$$\boldsymbol{R} = \rho Q_0 \upsilon_0 \sin\alpha\, \boldsymbol{e}_x$$

2. SIŁA DZIAŁAJĄCA NA DYSZĘ SIKAWKI STRAŻACKIEJ (PRĄDOWNICĘ)



$$Q = \upsilon_1 A_1 = \upsilon_2 A_2 \qquad \Rightarrow \qquad \upsilon_1 = Q / A_1 \ , \ \ \upsilon_2 = Q / A_2$$

Równanie Bernoulliego 1-2:

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_A + \tfrac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \qquad \Rightarrow \qquad p_1 - p_A = \tfrac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 - \tfrac{1}{2}\rho\upsilon_1^2$$

Reakcję obliczamy następująco …

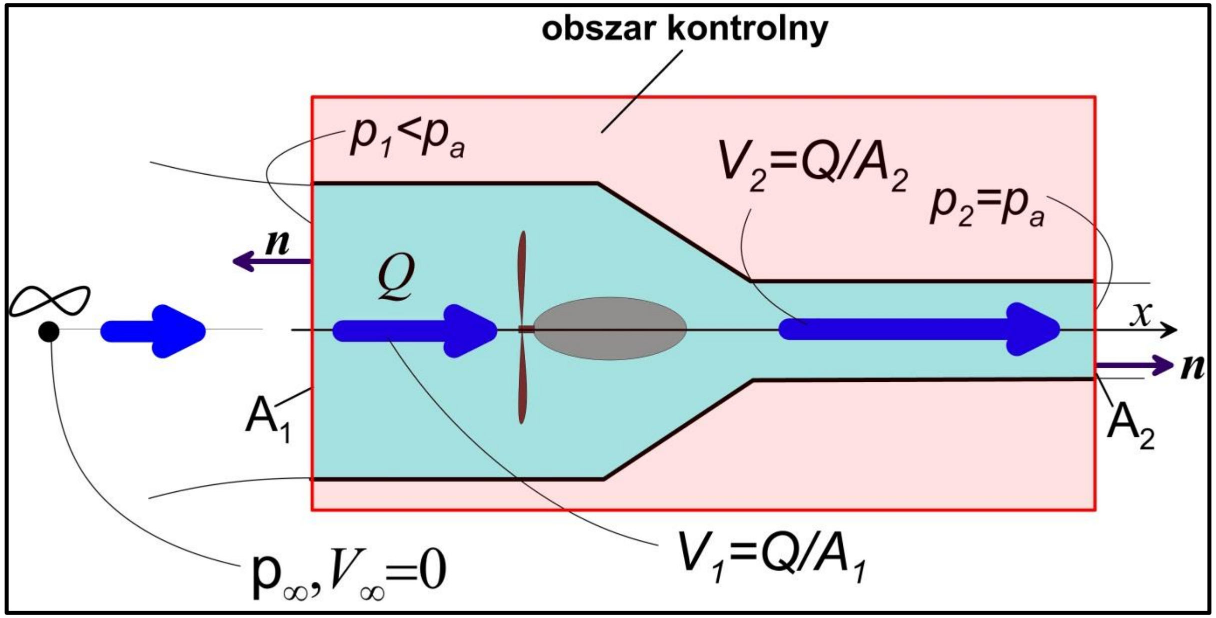
$$F_x = -\int_{A_1} \rho \upsilon_n \upsilon_x dS - \int_{A_1} (p - p_a) \underbrace{n_x}_{-1} dS - \int_{A_2} \rho \upsilon_n \upsilon_x dS - \int_{A_2} \underbrace{(p - p_a)}_{0} n_x dS =$$

$$= -\rho A_1 \upsilon_1 (-\upsilon_1) - A_1 (p_1 - p_a)(-1) - \rho A_2 \upsilon_2 \upsilon_2 = \rho A_1 \upsilon_1^2 - \rho A_2 \upsilon_2^2 + A_1 (\tfrac{1}{2} \rho \upsilon_2^2 - \tfrac{1}{2} \rho \upsilon_1^2) =$$

$$= \tfrac{1}{2} \rho A_1 \upsilon_1^2 - \rho A_2 \upsilon_2^2 + \tfrac{1}{2} \rho A_1 \upsilon_2^2 = \tfrac{1}{2} \rho \frac{Q^2}{A_1} - \rho \frac{Q^2}{A_2} + \tfrac{1}{2} \rho A_1 \frac{Q^2}{A_2^2} = \tfrac{1}{2} \frac{\rho Q^2}{A_1 A_2^2} (A_2^2 - 2 A_1 A_2 + A_1^2) =$$

$$= \tfrac{1}{2} \rho Q^2 \frac{(A_1 - A_2)^2}{A_1 A_2^2}$$

3. NAPĘD ODRZUTEM STRUMIENIA

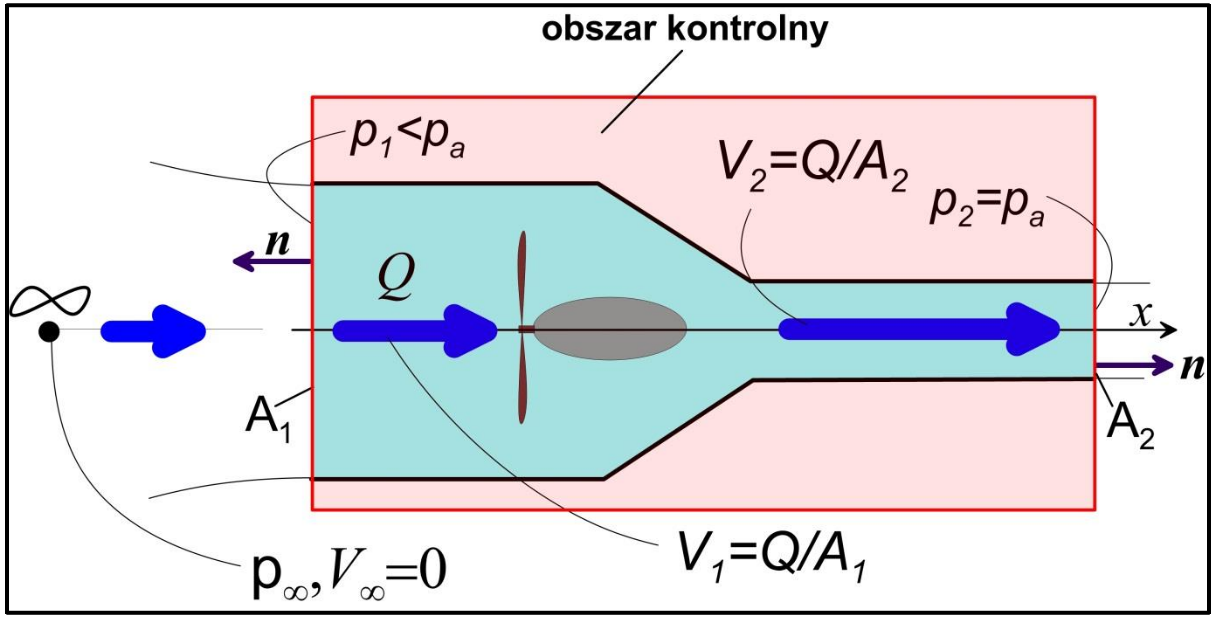


$$F_x = -\int_{A_1} \rho \upsilon_n \upsilon_x dS - \int_{A_1} (p - p_a) \underset{-1}{n_x}\, dS - \int_{A_2} \rho \upsilon_n \upsilon_x dS - \int_{A_2} \underbrace{(p - p_a)}_{0} n_x dS =$$

$$= -\rho A_1 \upsilon_1 (-\upsilon_1) - A_1 (p_1 - p_a)(-1) - \rho A_2 \upsilon_2 \upsilon_2 = \rho A_1 \upsilon_1^2 - \rho A_2 \upsilon_2^2 + A_1 (p_1 - p_a)$$

Równanie Bernoulliego dla strugi od ∞ do wlotu …

$$p_a = p_1 + \tfrac{1}{2} \rho \upsilon_1^2 \quad \Rightarrow \quad p_1 - p_a = -\tfrac{1}{2} \rho \upsilon_1^2$$



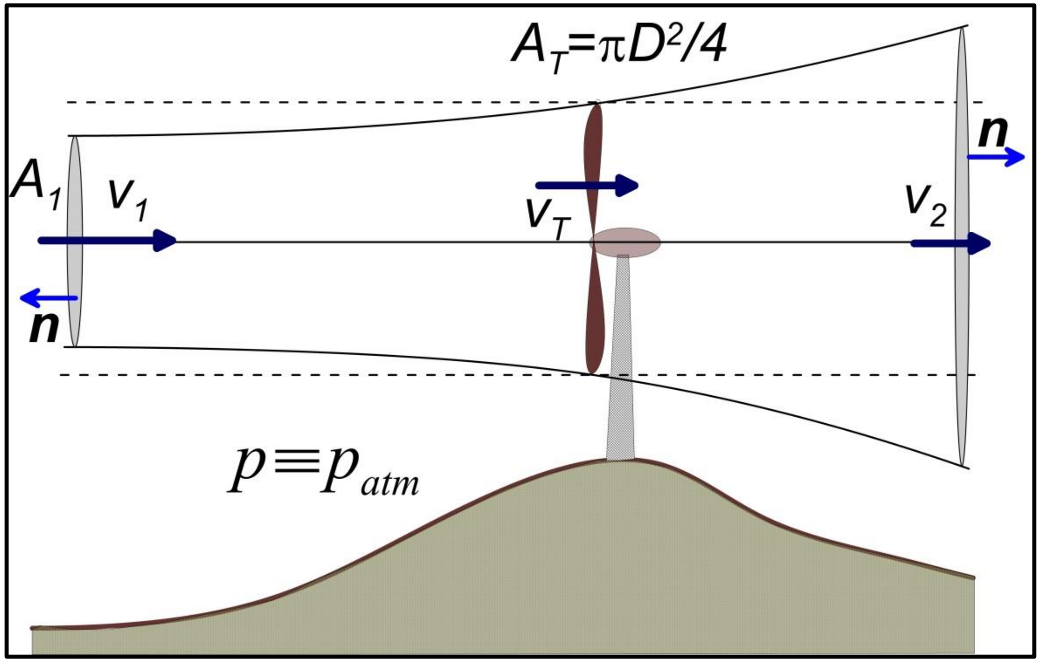
$$F_x = \rho A_1 \upsilon_1^2 - \rho A_2 \upsilon_2^2 - \tfrac{1}{2}\rho A_1 \upsilon_1^2 = \tfrac{1}{2}\rho A_1 \upsilon_1^2 - \rho A_2 \upsilon_2^2 = \tfrac{1}{2}\rho \frac{Q^2}{A_1} - \rho \frac{Q^2}{A_2} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\rho \frac{Q^2}{A_1 A_2}(A_2 - 2A_1)$$

Jeśli tylko $A_1 > \tfrac{1}{2} A_2$ to $F_x < 0$ i pędnik daje siłę ciągu.

Ćwiczenie: Rozwiązać to zadanie przyjmując, że pędnik porusza się z prędkością w (oczywiście w lewo!)

4. PROSTY MODEL SIŁOWNI WIATROWEJ. GRANICA BETZA.



Zakładamy, że w całym obszarze $p \equiv p_a$

Siła działająca na płyn z powodu obecności turbiny to

$$F_x = \int_{A_1} \rho \upsilon_n \upsilon_x dS + \int_{A_2} \rho \upsilon_n \upsilon_x dS =$$
$$= -\rho A_1 \upsilon_1^2 + \rho A_2 \upsilon_2^2 < 0$$

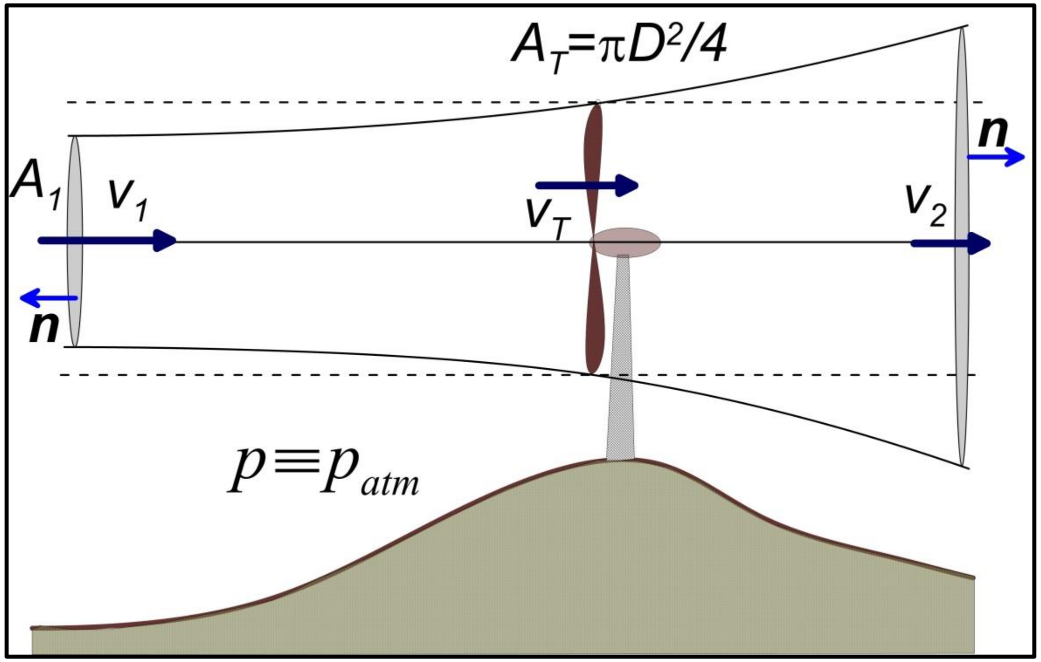
Bilans energii kinetycznej (de facto – mocy) strumienia powietrza

$$\Delta E_k = F_x \upsilon_T \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{2} Q_m \upsilon_2^2 - \tfrac{1}{2} Q_m \upsilon_1^2 = \upsilon_T (-\rho A_1 \upsilon_1^2 + \rho A_2 \upsilon_2^2)$$

Z warunku ciągłości strumienia mamy: $Q_m = \rho Q = \rho A_1 \upsilon_1 = \rho A_2 \upsilon_2 = \rho A_T \upsilon_T$

Bilans energii może być zapisany następująco: $\tfrac{1}{2} Q_m \upsilon_2^2 - \tfrac{1}{2} Q_m \upsilon_1^2 = \upsilon_T Q_m (\upsilon_2 - \upsilon_1)$

Wynika stąd wniosek: $\upsilon_T = \tfrac{1}{2}(\upsilon_1 + \upsilon_2)$



Niech: $\upsilon_1 \equiv V_\infty$ **i** $\upsilon_T = \alpha V_\infty$, $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$

Wówczas:

$$\upsilon_2 = 2\upsilon_T - \upsilon_1 = (2\alpha - 1)V_\infty$$

$$\upsilon_1 - \upsilon_2 = 2(1-\alpha)V_\infty$$

Wzór na siłę przyjmuje postać

$$|F_x| = \rho Q \upsilon_1 - \rho Q \upsilon_2 = \rho \upsilon_T A_T (\upsilon_1 - \upsilon_2) =$$

$$= 2\alpha(1-\alpha)\rho V_\infty^2 A_T$$

Formuła wyrażająca moc produkowaną przez turbinę to

$$P_T = |F_x| \upsilon_T = 2\alpha^2 (1-\alpha) \rho V_\infty^3 A_T$$

Obliczenie mocy maksymalnej:

$$q(\alpha) = 2\alpha^2(1-\alpha) \quad , \quad q'(\alpha) = 4\alpha - 6\alpha^2$$

$$q'(\alpha) = 0 \iff \alpha = 0 \quad \text{lub} \quad \alpha = \tfrac{2}{3} \quad \text{(max!)}$$

Zatem $q_{\max} = q(\frac{2}{3}) = \frac{8}{27}$ **i**

$$P_T^{\max} = \frac{8}{27}\rho V_\infty^3 A_T$$

Sprawnością nazywamy stosunek mocy produkowanej przez turbinę do mocy strumienia wiatru o polu A_T

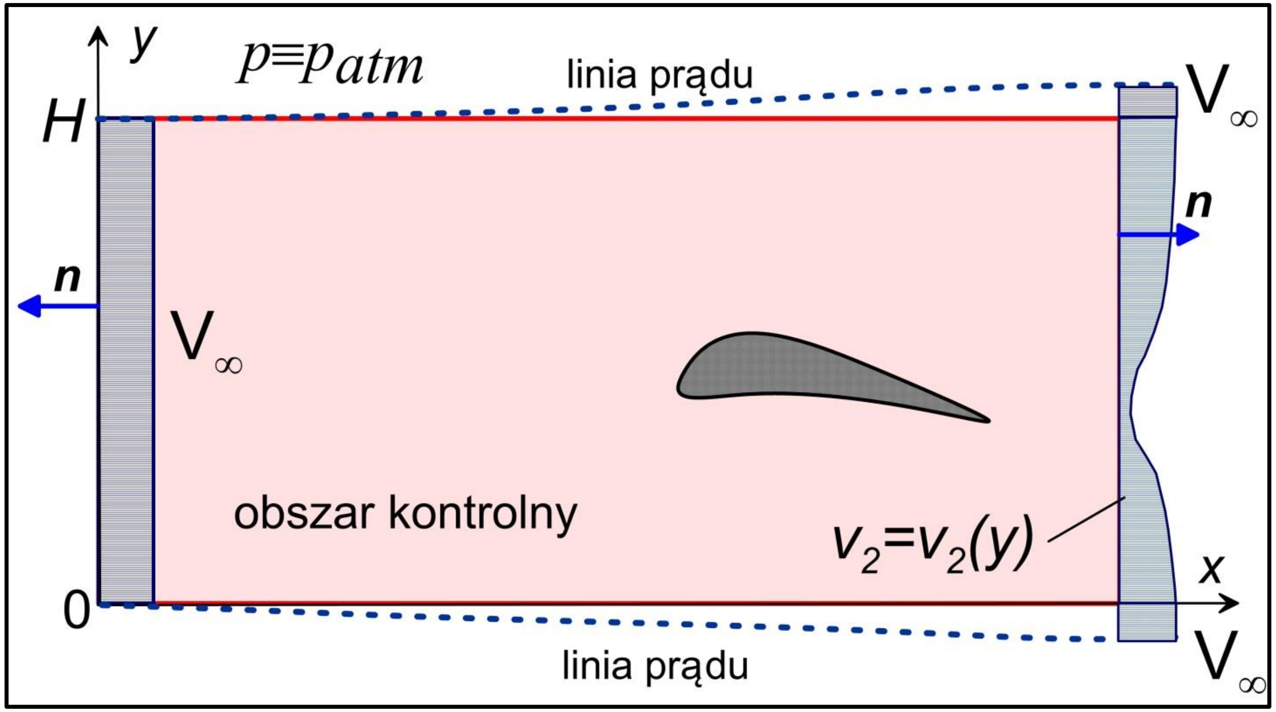
Mamy zatem

$$\eta = \frac{P_T}{\frac{1}{2}\rho A_T V_\infty^3} = 2q(\alpha) = 4\alpha^2(1-\alpha)$$

Zauważmy, że

$$\eta \le \eta_{\max} = \frac{16}{27} \approx\sim 59\% \quad - \quad \textit{granica Betza}$$

5. WYZNACZANIE OPORU AERODYNAMICZNEGO NA PODSTAWIE ROZKŁADU PRĘDKOŚCI W ŚLADZIE AERODYNAMICZNYM

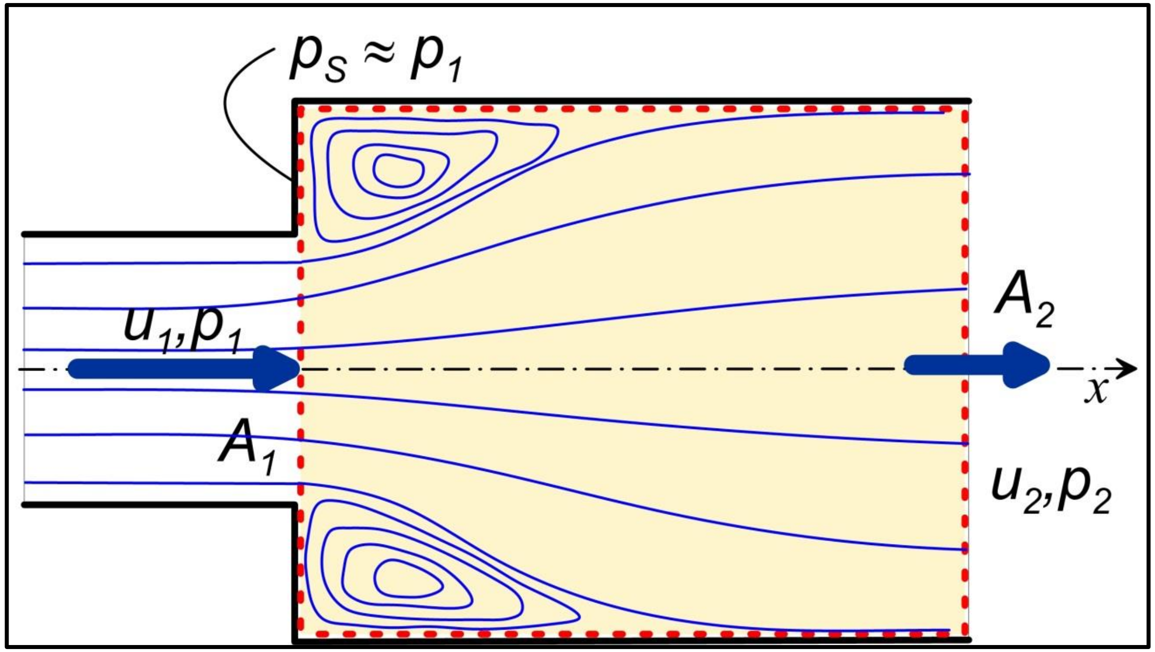


$$D = -\int_{wlot} \rho \upsilon_n \upsilon_x dS - \int_{wylot} \rho \upsilon_n \upsilon_x dS - \int_{boki} \rho \upsilon_n \upsilon_x dS =$$

$$= -\rho H(-V_\infty)V_\infty - \rho \int_0^H \upsilon_2^2(y)dy - \Delta Q_m V_\infty =$$

$$= \rho \int_0^H [V_\infty^2 - \upsilon_2^2(y)]dy - \rho V_\infty \int_0^H [V_\infty - \upsilon_2(y)]dy = \rho \int_0^H \upsilon_2(y)[V_\infty - \upsilon_2(y)]dy$$

6. ZASTOSOWANIE BILANSU PĘDU DO WYZNACZENIA LOKALNYCH STRAT HYDRAULICZNYCH



Założenie upraszczające: ciśnienie na pionowo zorientowanej części ściany przewodu jest równe ciśnieniu w samym strumieniu.

Przyrost pędu w obszarze kontrolnym

$$\Delta P_x = \rho A_2 u_2^2 - \rho A_1 u_1^2 = \rho A_2 \frac{A_1^2}{A_2^2} u_1^2 - \rho A_1 u_1^2 = \rho u_1^2 A_2 \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - \frac{A_1}{A_2} \right)$$

Siła działająca na ciecz w obszarze kontrolnym

$$F_x = p_1 A_1 + \underbrace{p_s}_{\approx p_1} (A_2 - A_1) - p_2 A_2 = (p_1 - p_2) A_2$$

Zgodnie z ZZP

$$\Delta P_x = F_x$$

Wynika stąd, że

$$\Delta p_{ZZP} \equiv p_2 - p_1 = \tfrac{1}{2}\rho u_1^2 \left(\frac{2A_1}{A_2} - \frac{2A_1^2}{A_2^2} \right)$$

Z „naiwnie" zastosowanego równania Bernoulliego mamy natomiast

$$\tfrac{1}{2}\rho u_1^2 + p_1 = \tfrac{1}{2}\rho u_2^2 + p_2$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta p_{RB} \equiv p_2 - p_1 = \tfrac{1}{2}\rho u_1^2 - \tfrac{1}{2}\rho u_2^2 = \tfrac{1}{2}\rho u_1^2 \left(1 - \frac{u_2^2}{u_1^2} \right) = \tfrac{1}{2}\rho u_1^2 \left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2} \right)$$

Jak widać, otrzymaliśmy inny wynik, tj.

$$\Delta p_{ZZP} \neq \Delta p_{RB}$$

Skorygujemy równanie Bernoulliego o składnik wyrażający **dodatkową stratę ciśnienia** (w hydraulice ten typ strat nazywamy **stratami lokalnymi** – o tym w jednym z następnych wykładów):

$$\tfrac{1}{2}\rho u_1^2 + p_1 = \tfrac{1}{2}\rho u_1^2 + p_2 + \Delta p_{str} \;\Rightarrow\; p_2 - p_1 = \tfrac{1}{2}\rho u_1^2 - \tfrac{1}{2}\rho u_1^2 - \Delta p_{str}$$

Zachodzi zatem związek

$$\Delta p_{ZZP} = \Delta p_{RB} - \Delta p_{str} \;\Rightarrow\; \Delta p_{str} = \Delta p_{RB} - \Delta p_{ZZP}$$

Obliczmy lokalną stratę ciśnienia

$$\Delta p_{str} = \tfrac{1}{2}\rho u_1^2 \left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2} - \frac{2A_1}{A_2} + \frac{2A_1^2}{A_2^2}\right) = \underbrace{\left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2}_{\zeta_1} \tfrac{1}{2}\rho u_1^2 = \zeta_1 \tfrac{1}{2}\rho u_1^2$$

Wprowadziliśmy współczynnik strat lokalnych strat równy $\zeta_1 = (1 - A_1/A_2)^2$. Prędkością referencyjną jest **średnia prędkość cieczy w rurze przez połączeniem**.

Jeśli z jakichś powodów wolimy, aby **prędkością referencyjną była prędkość w rurze za połączeniem,** to wystarczy dokonać następującego przeliczenia

$$\Delta p_{str} = \left(1-\frac{A_1}{A_2}\right)^2 \tfrac{1}{2}\rho u_1^2 = \left(1-\frac{A_1}{A_2}\right)^2 \tfrac{1}{2}\rho \frac{A_2^2}{A_1^2} u_2^2 = \underbrace{\left(\frac{A_2}{A_1}-1\right)^2}_{\zeta_2} \tfrac{1}{2}\rho u_2^2 = \zeta_2 \tfrac{1}{2}\rho u_2^2$$

Tym razem współczynnik strat lokalnych ma postać $\zeta_2 = (A_2/A_1 - 1)^2$.

Uwaga: Za graniczny przypadek opisanej geometrii można uznać granicę $\frac{A_2}{A_1} \to \infty$, co odpowiada wypływowi cieczy z rury o polu przekroju A_1 do wielkiego zbiornika. Zauważmy, że wówczas

$$\lim_{\frac{A_2}{A_1}\to\infty} \zeta_1 = 1$$

Oczywiście, współczynnik ζ_2 staje się w tej sytuacji nieograniczony.